01

01-1

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Renate Motzer

Bezug: „Mathe vernetzt“ Band 2, S. 104–114.

1 Eingliederung im Mathematikunterricht

Klasse/Stufe: Sekundarstufe II, Kurse zur Begabtenförderung

Stoffliche Einordnung:

Es handelt sich um eine anspruchsvollere Fragestellung aus dem Bereich der Stochastik. Da ein funktionaler Zusammenhang (Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer) angesprochen wird, spielen auch Aspekte der Kurvendiskussion (Monotonieverhalten, Grenzwerte und Extremwerte) eine Rolle.

Voraussetzungen:

Die Berechnung von *Erwartungswerten* muss bekannt sein. Weiterhin sollten die Schüler/innen mit dem Arbeiten mit einem *Tabellenkalkulationsprogramm* vertraut sein.

2 Tipps zum methodischen Einsatz des Arbeitsblattes

Die Schülerinnen und Schüler sollen versuchen, sich die benötigten Terme selbst herzuleiten. Die gesuchten Werte sollen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm ermittelt werden. Weiterhin sollen passende Graphen gezeichnet werden, die zeigen, wie sich die Gewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der abgegebenen Tipps entwickeln.

3 Lösungen mit Hinweisen und Reflexion

Ein Lösungsblatt mit den wichtigsten Formeln ist als weiteres Arbeitsblatt beigefügt. Es sollte den Schüler/innen als Kontrolle zugänglich sein. Wenn die Formeln von den Schüler/innen nicht selbst gefunden werden, sollten sie zumindest angehalten werden, eigenständig Erklärungen für das Zustandekommen der Formeln zu finden. Welche Bedeutung haben die Faktoren, die in den Termen auftauchen?

Eine wichtige Rolle spielen dabei immer die Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Da n als Variable, nicht als konkrete Zahl, vorhanden ist, muss ein Term für $\binom{n}{k}$ verwendet werden, z.B. $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Die Formeln müssen von den Schülerinnen und Schülern nicht immer aufs Papier geschrieben werden. Sie treten eventuell nur am PC im Tabellenkalkulationsprogramm durch Kopieren und Ändern der Formeln aus 4 überhaupt in Erscheinung.

Die ausformulierten Formeln und Ausschnitte aus den Tabellen und zugehörigen Graphen finden sich im Basisartikel.

Den Schülerinnen und Schüler muss bewusst werden, dass sie den gesuchten Wert nicht exakt berechnen können, dass ihnen aber geeignete Abschätzungen helfen.

Die vollständigen Lösungen sind:

zu 3:

$p(\text{„}genau\ 3\text{“}) = n(n-1)(n-2)/6 \bullet (1 - 1/10 \bullet 1/13983816)^{n-3} \bullet (1/139838160)$

$p(\text{„}genau\ 4\text{“}) = n(n-1)(n-2)(n-3)/24 \bullet (1 - 1/10 \bullet 1/13983816)^{n-4} \bullet (1/139838160)^4$

$p(\text{„}genau\ 5\text{“}) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/120 \bullet (1 - 1/10 \bullet 1/13983816)^{n-5} \bullet (1/139838160)^5$

$p(\text{„}genau\ 6\text{“}) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)/720 \bullet (1 - 1/10 \bullet 1/13983816)^{n-6} \bullet (1/139838160)^6$

und

$p(\text{„}\textbf{mindestens}\ 6\text{“}) = 1 - p(\text{„}keiner\text{“}) - p(\text{„}genau\ 1\text{“}) - p(\text{„}genau\ 2\text{“}) - p(\text{„}genau\ 3\text{“}) - p(\text{„}genau\ 4\text{“}) - p(\text{„}genau\ 5\text{“})$

01

01-1

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Renate Motzer

Bezug: „Mathe vernetzt“ Band 2, S. 104–114.

zu 7: Die zugehörigen Graphen sehen so aus:

zu 4 a und c :

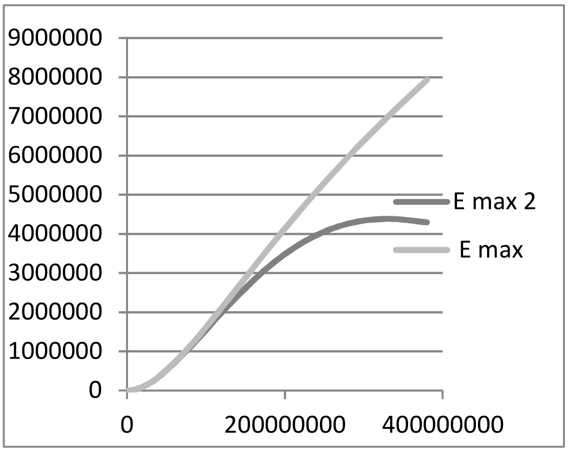

Abbildung 1

zu 4 b und d **:**

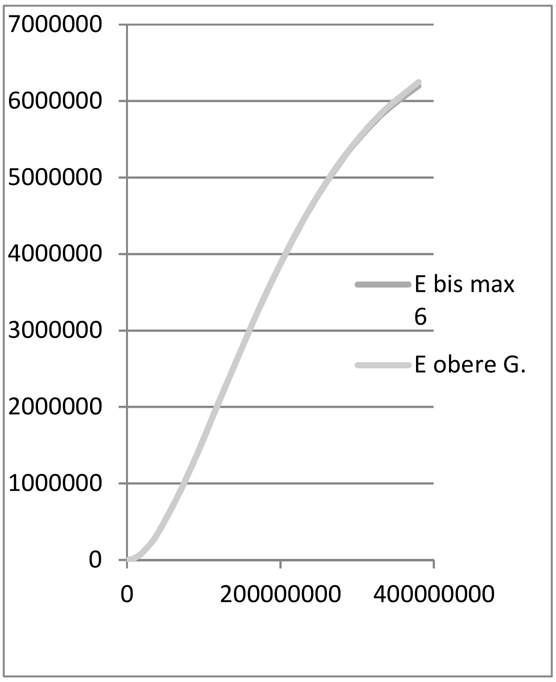

Abbildung 2

zu 6 b und d (ohne Jackpot):

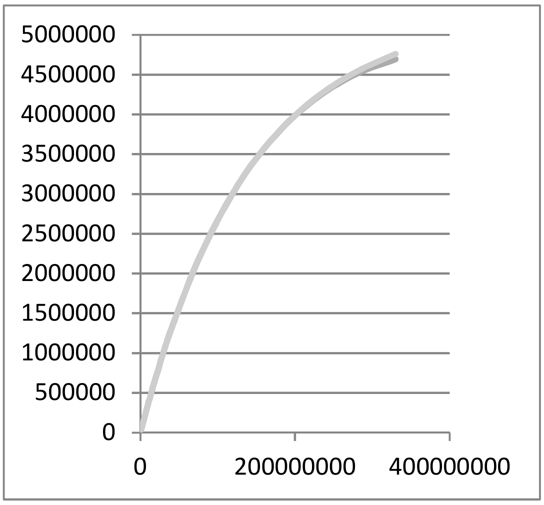

Abbildung 3

zu 5 a und c (mit Jackpot 40 Mio. €) :

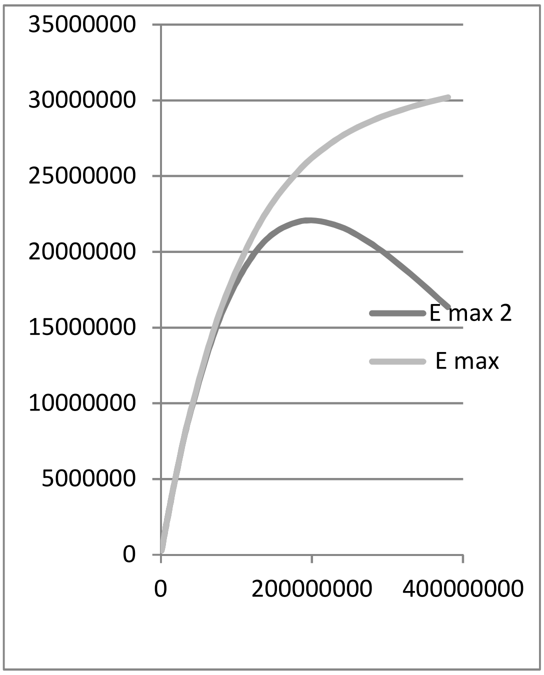

Abbildung 4

01
01-1

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Renate Motzer

Bezug: „Mathe vernetzt“ Band 2, S. 104–114.

zu 6a und c (ohne Jackpot) :

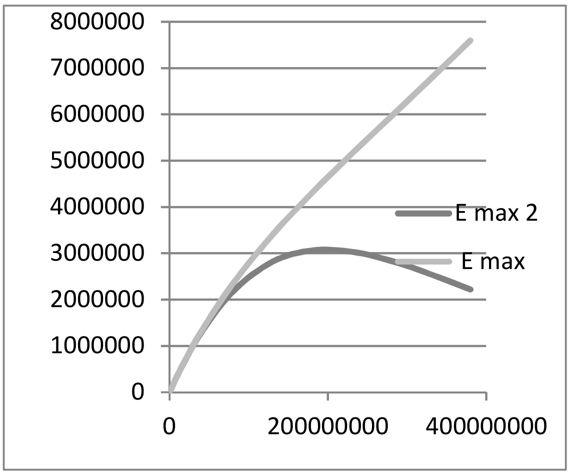

Abbildung 5

zu 6 a und c (mit 40 Mio. €):

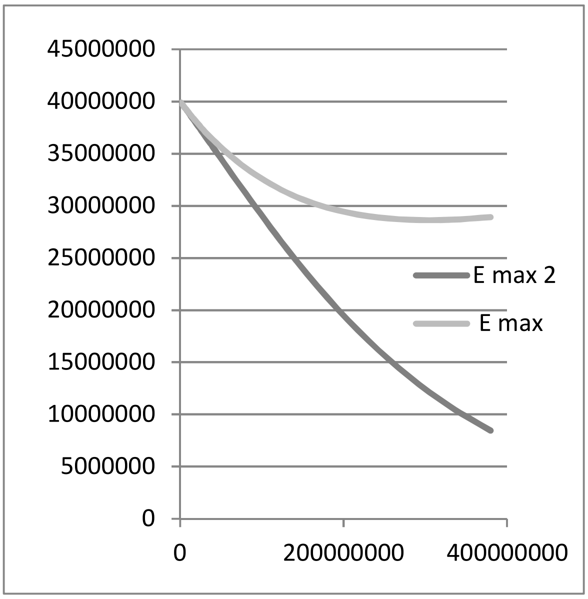

Abbildung 6

zu 5 b und d (mit 40 Mio. €) :

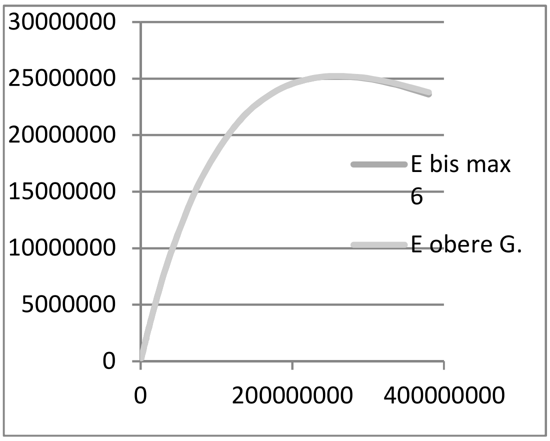

Abbildung 7

01

01-1

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Renate Motzer

Bezug: „Mathe vernetzt" Band 2, S. 104–114.

zu 6 b und d (mit 40 Mio €):

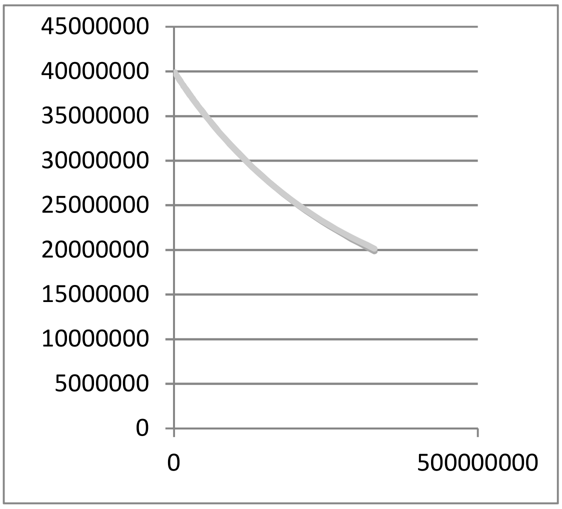

Abbildung 8

zu 6 a und c (mit 10 Mio. €):

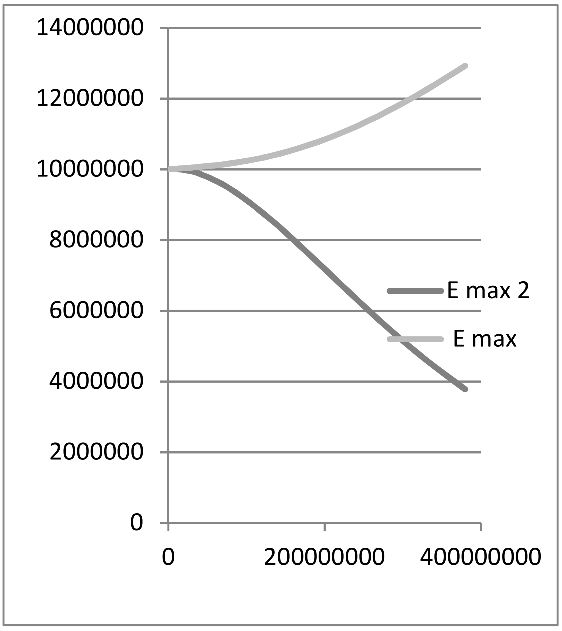

Abbildung 9

zu 6 b und d (mit 10 Mio.):

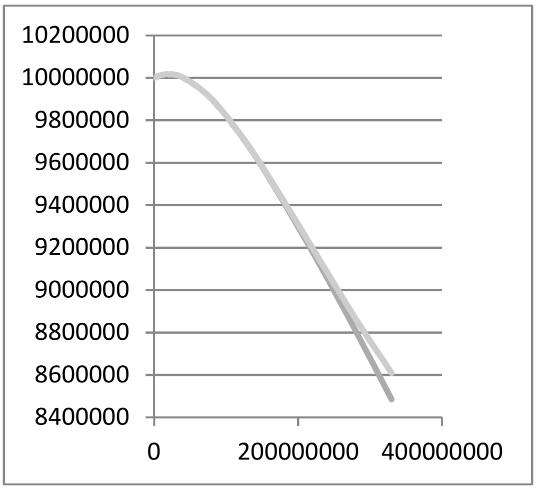

Abbildung 10

Zunächst steigt die Gewinnerwartung. Ab 40 Mio Lottotipps fällt sie wieder. Schaut man sich den Bereich bis 100 Mio genauer an, sieht man dies:

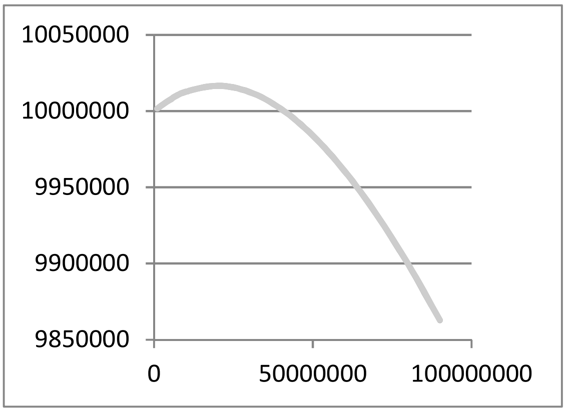

Abbildung 11

Achtung: Ganz wichtig bei der Betrachtung der letzten beiden Graphen ist, dass die Werte auf der y-Achse nicht bei 0 beginnen und relativ nahe beieinander liegen. Was also als deutlicher Abfall wahrgenommen wird, ist nur ein relativ geringer.

Name: ______________________________ Klasse: ____________

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Datum: ____________

Arbeitsblatt-Nr.: __1__

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige im Lotto plus Superzahl“ liegt bei etwa 1:140 Millionen.

Aufgabe 2

Wenn etwa 10/20/40/100 Millionen Tipps abgegeben werden: Wie wahrscheinlich ist es, dass der Jackpot nicht geleert wird (keinmal „6 Richtige plus Superzahl“) / genau einmal „6 Richtige mit Superzahl“ auftauchen/ es genau 2 Gewinner / es mehrere Gewinner gibt?

Erstellen Sie eine (Excel-)Tabelle, in der diese Werte berechnet werden.

Aufgabe 3

Wie wahrscheinlich ist es, dass es *genau 3/ genau 4/ genau 5 / genau 6/ mindestens 6 Gewinner* gibt?

Aufgabe 4

Ist der Jackpot im Vorfeld leer, so stehen nach der Ziehung

n • 0,75 € • 0,05 für die höchste Gewinnklasse zur Verfügung.

Berechnen Sie einen Näherungswert für den Erwartungswert, den die Lotteriegesellschaft an einen Gewinner auszahlen muss, wenn man annimmt, dass im Fall,

a) dass es mindestens 2 Gewinner gibt, jeder Gewinner die Hälfte von n • 0,75 € • 0,05 bekommt.
b) dass es mindestens 6 Gewinner gibt, jeder Gewinner ein Sechstel von n • 0,75 € • 0,05 bekommt.
c) dass es mindestens 3 Gewinner gibt, diese nichts mehr bekommen.
d) dass es mindestens 7 Gewinner gibt, diese nichts mehr bekommen.

Warum kann man durch a – d) Schätzung für den Erwartungswert des Gewinnes an einen einzelnen Gewinner ablesen?

Name: ________________________________ Klasse: ____________

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Datum: ____________

Arbeitsblatt-Nr.: __2__

Aufgabe 5

Wie ändern sich die Rechnungen analog zu 4, wenn man annimmt, dass im Jackpot aus früheren Ziehungen 10 Mio /40 Mio € zusätzlich vorhanden sind?

Aufgabe 6

Wie ändern sich die Rechnungen bei **4** und **5** , wenn man sich dafür interessiert, wie viel ein Einzelner, der schon weiß, dass er „6 Richtige plus Zusatzzahl" hat, als Gewinnsumme zu erwarten hat?

Aufgabe 7

Betrachten Sie die errechneten Gewinne als Funktion von n.

Zeichnen Sie die Graphen (mit Excel) und beobachten Sie, ob es Extremwerte gibt.

Name: ______________________________ Klasse: ___________

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer

Datum: ___________

Arbeitsblatt-Nr.: __3__

Lösungshinweise :

zu 2: Warum passen folgende Ansätze?

Begründen Sie, wie die auftretenden Faktoren zustande gekommen.

$p(\text{„}genau\ 1\text{“}) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13983816}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{13983816}$

$p(\text{„}genau\ 2\text{“}) = \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13983816}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{13983816}\right)^2$

$p(\text{„}mindestens\ 2\text{“}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13983816}\right)^{n} -$
$n \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13983816}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{13983816}$

zu 3: Wie müssen analog zur Aufgabe 2 die Terme für $p(\text{„}genau\ 3\text{“})$, $p(\text{„}genau\ 4\text{“})$, $p(\text{„}genau\ 5\text{“})$, $p(\text{„}genau\ 6\text{“})$ und $p(\text{„}\boldsymbol{mindestens}\ 6\text{“})$ aussehen?

Bsp.: Term für $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

zu 4:

a) $E\ max\ (n) = p(\text{„}genau\ 1\text{“}) \cdot Gewinn +$
$p(\text{„}mindestens\ 2\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{2}$

b) $E\ max\ (n) = p(\text{„}genau\ 1\text{“}) \cdot Gewinn + p(\text{„}genau\ 2\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{2} +$
$p(\text{„}genau\ 3\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{3} + p(\text{„}genau\ 4\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{4} +$
$p(\text{„}genau\ 5\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{5} + p(\text{„}\boldsymbol{mindestens}\ 6\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{6}$

c) $E\ max\ 2\ (n) = p(\text{„}genau\ 1\text{“}) \cdot Gewinn + p(\text{„}genau\ 2\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{2}$

d) $E\ max\ 6\ (n) = p(\text{„}genau\ 1\text{“}) \cdot Gewinn + p(\text{„}genau\ 2\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{2} +$
$p(\text{„}genau\ 3\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{3} + p(\text{„}genau\ 4\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{4} +$
$p(\text{„}genau\ 5\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{5} + p(\text{„}genau\ 6\text{“}) \cdot Gewinn \cdot \frac{1}{6}$

Mathematik Name: ______________________ Klasse: __________

Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer Datum: __________

Arbeitsblatt-Nr.: __4__

Lösungshinweise zu Arbeitsblatt 2:

zu 5: die Gewinnsumme, die zu teilen ist, lautet jeweils:
0,05 • *n* • 0,75 € + 10000000 €
bzw. 0,05 • *n* • 0,75 € + 40000000 €

zu 6 : bezogen auf Aufgabe 4 :

a) *E max* (*n*) = *p*(*„kein weiterer“*) • *Gewinn* +
p(*„mindestens 1 weiterer“*) • *Gewinn* • $\frac{1}{2}$ =
$(1-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{13983816})^{n-1}\bullet 0{,}05\bullet n\bullet 0{,}75$ € +
$(1-(1-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{13983816})^{n-1})\bullet\frac{0{,}05\bullet n\bullet 0.75}{2}$ €

b) analog

c) *E max* 2 (*n*) = *p*(*„kein weiterer“*) • *Gewinn* +
p(*„genau* 1 *weiterer“*) • *Gewinn* • $\frac{1}{2}$ =
$(1-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{13983816})^{n-1}\bullet 0{,}05\bullet n\bullet 0{,}75$ € +
$(n-1)\bullet(1-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{13983816})^{n-2}\bullet\frac{1}{13983816}\bullet\frac{0{,}05\bullet n\bullet 0.75}{2}$ €

d) analog

Bezogen auf Aufgabe 5 ändert sich der *Gewinn* entsprechend.